UM NOVO PARADIGMA NA GESTÃO DE CARTEIRAS DE ACTIVOS FINANCEIROS(1)

António de Sousa da Câmara (2)

1-Introdução

O processo de investimento consiste na distribuição de recursos por classes de activos e, consequentemente, na afectação de fundos dentro de cada uma das classes, tendo como resultado a constituição de uma carteira de activos financeiros. A teoria de carteiras, cujo tema central de investigação incide sobre as metodologias de constituição de carteiras eficientes, não entra em consideração com as responsabilidades do investidor, pelo que o estudo desta questão tem sido centrado na relação rendibilidade esperada-risco dos activos. A selecção de carteiras eficientes efectuada com base na relação rendibilidade esperada-risco do capital próprio do investidor é uma abordagem muito recente do problema e vai ser o assunto a analisar neste artigo.

A maioria dos agentes económicos tem responsabilidades para cumprir no futuro. Os passivos dos diferentes investidores não são necessariamente sensíveis aos mesmos factores económicos. Para fazer face a estas responsabilidades de uma forma eficiente é essencial tomar uma decisão eficaz sobre as proporções da riqueza inicial a investir nas diferentes classes de activos, como sejam as acções e as obrigações, e dentro de cada uma dessas classes. A explicitação deste facto justifica plenamente que a definição de carteiras eficientes seja efectuada numa estrutura rendibilidade esperada-risco do capital próprio do investidor.

Um investidor tem, por um lado, uma carteira de activos e, por outro, responsabilidades para cumprir. O valor actual da sua carteira menos o valor actual do seu passivo é igual ao valor actual do seu capital próprio. Uma carteira de activos é eficiente em ambiente de capital próprio se a ela estiver associada uma estrutura de capital próprio com uma variância(3) mínima para uma dada taxa de rendibilidade esperada e uma taxa de rendibilidade esperada máxima para uma dada variância(4).

O risco associado à detenção de uma carteira altera-se profundamente quando a avaliação se efectua de acordo com esta recente abordagem, pois torna-se necessário considerar a variabilidade das responsabilidades e a covariabilidade entre activos e passivos. O processo tradicional de avaliação de investimentos financeiros, através da rendibilidade e risco dos activos, apenas é adequado quando o valor das responsabilidades é constante.

Para não tornar impraticável a selecção de uma carteira de activos(5) é necessário encontrar um modelo para gerar a rendibilidade e o risco das acções, outro modelo para gerar a rendibilidade e o risco das obrigações e um terceiro modelo para encontrar essas estatísticas para as responsabilidades. Sugere-se a aplicação das regras modificadas de Markowitz(1952) e Tobin(1958) para combinar esses três modelos e seleccionar carteiras eficientes.

2 - As origens da teoria de carteiras

A origem da teoria de carteiras deve-se a Markowitz (1952). A sua preocupação foi encontrar uma regra que permitisse o investimento numa carteira de activos diversificada, isto é, numa carteira constituída por activos de diferentes categorias.

---

(1) Este trabalho baseia-se na tese de Mestrado que elaborei sob supervisão do Professor José Neves Adelino. Estou muito agradecido pela sua orientação aquando da elaboração da dissertação. Agradeço ao Professor Rogério Fernandes Ferreira a sugestão que me fez para traduzir a expressão "net worth" por capital próprio e não por situação líquida. Os erros existentes nos meus trabalhos são da minha exclusiva responsabilidade.

(2) Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.

(3) A variância das taxas de rendibilidade é o indicador (geralmente aceite) que estima o risco total de um activo ou carteira.

(4) A selecção de carteiras deve basear-se nesta definição, em detrimento da regra da maximização do valor actual do capital próprio, na medida em que esta regra não leva geralmente à constituição de uma carteira diversificada.

(5) Algumas das classes de activos que podem integrar uma carteira são as acções, as obrigações, o imobiliário, os metais preciosos (ouro e prata), as jóias, a arte (pintura e escultura) e os selos. Tendo em conta os critérios que determinam a actratibilidade mínima do investimento (Diermeier,1988), este artigo incide apenas sobre as acções ordinárias e as obrigações de taxa fixa emitidas pelo Estado, que se podem considerar sub-classes, respectivamente, da categoria de acções e da categoria de obrigações.

Tendo por base esta preocupação, aquele autor recomendou a utilização prática de uma regra que designou por V-R (variância-rendibilidade esperada), em detrimento da maximização do valor actual líquido dos activos, porque esta solução leva geralmente à constituição de uma carteira não diversificada. A regra proposta diz que «um investidor deverá seleccionar uma carteira que tenha uma combinação eficiente de V-R, isto é, uma carteira que tenha uma variância mínima para uma dada rendibilidade esperada ou uma rendibilidade esperada máxima para uma dada variância».
Com esta definição, Markowitz formulou o seguinte problema de optimização matemática:

$$\text{Max } E(R_c)$$

$$\text{s.a. } 1)\ \sigma_c^2 = K$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$3)\ X_i \geq 0,\ \forall X_i$$

onde:

$E(R_c)$ é a taxa de rendibilidade esperada da carteira;

σ_c^2 é a variância das taxas de rendibilidade da carteira;

K é um número real positivo;

X_i é a percentagem de riqueza inicial a investir no activo i.

N é o número de activos a incluir na carteira.

Esta é a apresentação tradicional do problema de distribuição por activos[6]. Com a resolução deste problema, para um K específico, encontra-se uma carteira que tem uma combinação eficiente de V-R. Resolvendo este problema sucessivas vezes para diferentes valores de K, é possível encontrar a curva concava que aparece desenhada no diagrama 1. Esta curva é conhecida por fronteira eficiente de Markowitz. Cada ponto desta fronteira é uma carteira eficiente, pois tem uma combinação eficiente de V-R.

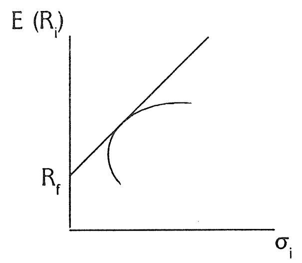

Diagrama 1

A utilização da regra de Markowitz baseia-se em três pressupostos (Alexander et al.1989):

1) Os investidores são insatisfeitos. Isto quer dizer que os investidores, perante duas carteiras com o mesmo risco (desvio padrão das taxas de rendibilidade), preferem aquela que tiver a taxa de rendibilidade esperada mais elevada.
2) Os investidores são aversos ao risco. Isto quer dizer que os investidores, perante duas carteiras com a mesma rendibilidade esperada, preferem aquela que tiver o menor risco.
3) A taxa de rendibilidade da carteira é uma variável aleatória que pode ser descrita por uma distribuição de probabilidades normal.

Tobin(1958), com o objectivo de complementar a análise de Markowitz, adicionou outro pressuposto àqueles três. Tobin assumiu que existia um activo sem risco, isto é, que os investidores podiam tomar e ceder fundos a uma taxa sem risco. Nestas condições, um investidor deve aplicar uma proporção dos seus recursos no activo sem risco e o restante na carteira da fronteira eficiente de Markowitz de maior declive $[E(Rc)-Rf]/\sigma_c$, a carteira c. Alterando estas proporções, constata-se que os pontos ou carteiras da semi-recta desenhada no diagrama 1 correspondem a diferentes estratégias de investimento. Mais, nota-se que esta nova fronteira, designada por fronteira eficiente de Tobin, domina a fronteira eficiente de Markowitz e que, portanto, os investidores devem seleccionar uma carteira desta nova fronteira, que se define pela seguinte fórmula:

$$E(R_E) = R_f + \{[E(Rc)-Rf]/\sigma_c\}\ \sigma_E$$

onde:

E significa estratégia;

R_f é a taxa de rendibilidade proporcionada pelo activo sem risco, a taxa sem risco.

Como a taxa de rendibilidade da carteira é uma variável aleatória que pode ser descrita por uma distribuição de probabilidades normal, os agentes

[6] A distribuição por activos consiste na determinação das percentagens da riqueza inicial a investir em cada uma das classes de activos. Markowitz (1952) referiu que as variáveis (X_i) podem representar proporções a aplicar em títulos individuais ou agregados, tais como obrigações, acções e imobiliário.

económicos podem tomar as suas decisões de investimento apenas com base em duas variáveis:

$$E(R_c) = \sum_{i=1}^{N} X_i \, E(R_i)$$

$$\sigma^2_c = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i \, X_j \, \sigma_{ij}$$

onde:
σ_{ij} é a covariância entre as taxas de rendibilidade do activo i e as do activo j.

Markowitz (1959) fez notar que não era razoável calcular directamente a covariância das taxas de rendibilidade para todos os pares de activos pois, quando o número de activos é elevado, a quantidade de informação a tratar torna muito lento o processo de selecção de carteiras eficientes. Aquele autor sugeriu uma forma para simplificar a representação da sua fronteira eficiente que se baseia na utilização do modelo de mercado. De acordo com este modelo, a relação entre a taxa de rendibilidade de um activo (R_i) e a taxa de rendibilidade de um índice (R_I) pode ser expressa do seguinte modo:

$$R_i = a_i + \beta_i \, R_I + e_i$$

onde:

a_i é uma constante que capta a rendibilidade esperada do activo, que não está relacionada com o índice.

β_i é o beta ou sensibilidade do activo ao índice.

O modelo de mercado assume que os resíduos dos diferentes activos não estão correlacionados, pelo que a covariância entre as taxas de rendibilidade de dois títulos é dada por $\beta_i \beta_j \sigma_I^2$. Este pressuposto permite simplificar o cálculo da variância da carteira (que é dada por $\sigma_c^2 = \beta_c^2 \, \sigma_I^2 + \sigma_{ec}^2$), na medida em que a variância dos resíduos da carteira (σ_{ec}^2) é:

$$\sigma_{ec}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \, \sigma_{ei}^2$$

onde:

σ_{ei}^2 é a variância dos resíduos do activo i.

A hipótese de que o pressuposto do modelo de mercado pode ser violado levou diversos autores a sugerirem a utilização de modelos de múltiplos índices(7) na construção da fronteira eficiente de Markowitz.

O modelo de múltiplos índices pode ser estimado assumindo-se que os factores são ortogonais(8), o que evita problemas de multicoliniariedade e diminiu a quantidade de informação necessária para encontrar uma carteira eficiente (em relação á proposta de 1952 de Markowitz). É também pressuposto deste modelo que os resíduos dos diferentes activos não estão correlacionados.

No modelo de mercado e nos modelos de múltiplos índices, os diferentes activos são explicados pelo mesmo conjunto de factores.

Yoon(1979) construiu a fronteira eficiente de Markowitz com base em dois modelos distintos de um único índice. Por um lado, usou o modelo de mercado para gerar a taxa de rendibilidade e o risco das acções e, por outro, usou um modelo de um único índice para gerar a taxa de rendibilidade e o risco das obrigações. Neste modelo assume-se que a taxa de rendibilidade de uma obrigação é uma função linear da variação da taxa interna de rendibilidade do mercado, recebendo a sensibilidade a designação de duração modificada(9).

3 - O novo paradigma

As regras definidas por Markowitz e Tobin foram criticadas recentemente (Love,1987), (Arthur et al.,1990), pois apenas se aplicam a activos ou a classes de activos, negligenciando as responsabilidades do investidor. Estes autores consideram que os activos e as responsabilidades não são independentes e que ambos devem ser avaliados como fluxos de caixa futuros. Ainda de acordo com esta linha de pensamento, Sharpe (1987) escreveu que os investidores devem maximizar o valor do seu capital próprio e não o dos seus activos. Um ano mais tarde, Arnott (et al.,1988) e Leibowitz (et al.,1988) desenharam as primeiras fronteiras eficientes do

(7) É do seguinte tipo um modelo de múltiplos índices que pretende explicar a rendibilidade de um activo i: $R_i = a_i + b_{i1} R_{I1} + b_{i2} R_{I2} + ... + b_{im} R_{Im} + e_i$

(8) Elton &Gruber (1987) apresentam uma metodologia para reduzir qualquer modelo de múltiplos índices num modelo de múltiplos índices ortogonais.

(9) A duração modificada é uma medida de risco de uma obrigação. Neste caso, pretende estimar a variação percentual no preço da obrigação em função da variação da taxa interna de rendibilidade.

capital próprio (ou excesso, para o caso dos fundos de pensões), como se pode ver no diagrama 2:

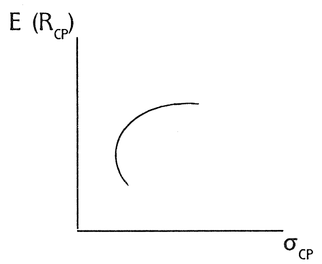

Diagrama 2

Cada ponto desta fronteira corresponde a uma carteira de activos que é eficiente numa estrutura de capital próprio. Neste novo paradigma, uma carteira de activos é eficiente se a ela estiver associada uma variância mínima do capital próprio para uma dada taxa de rendibilidade esperada do capital próprio e uma taxa de rendibilidade esperada do capital próprio máxima para uma dada variância do capital próprio.
A taxa de rendibilidade esperada que interessa considerar no processo de investimento, num ambiente de capital próprio, é a diferença ponderada entre a taxa de rendibilidade esperada dos activos [E(R_A)] e a taxa de rendibilidade esperada das responsabilidades, [E(R_R)] isto é:

$$E(R_{C.P.}) = \theta\, E(R_A) - (\theta - 1)\, E(R_R)$$

onde:

E($R_{C.P.}$) é a taxa de rendibilidade esperada do capital próprio;

θ é o quociente entre o valor de mercado do activo e o valor de mercado do capital próprio.

O risco associado à detenção de uma carteira altera-se, ainda mais visivelmente, quando esta é avaliada no novo paradigma, pois é necessário entrar em consideração com a variabilidade das responsabilidades e com a covariabilidade entre activos e passivos. O risco é, neste caso, dado pela variância das taxas de rendibilidade do capital próprio ($\sigma_{C.P.}^2$):

$$\sigma_{C.P.}^2 = \theta^2\sigma_A^2 + (\theta - 1)^2\sigma_R^2 - 2\,\theta(\theta - 1)\,\sigma_{AR}$$

onde:

σ_A^2 é a variância das taxas de rendibilidade do activo.

σ_R^2 é a variância das taxas de rendibilidade da responsabilidade.

σ_{AR}^2 é a covariância entre as taxas de rendibilidade do activo e as taxas de rendibilidade da responsabilidade.

Esta apresentação é suficiente, só por si, para mostrar que o processo tradicional de avaliação de investimentos, através da rendibilidade e do risco dos activos, apenas é adequado quando as responsabilidades são constantes.

É interessante verificar que o artigo de Leibowitz (et al.,1988) complementa o de Arnott (et al.,1988), da mesma forma que o de Tobin (1958) havia complementado o de Markowitz(1952). Naquele trabalho refere-se que «uma carteira imunizada não tem risco numa estrutura de capital próprio ou excesso (para o caso dos fundos de pensões). Então, combinando diferentes proporções da carteira imunizada com uma carteira de excesso, é possível desenhar uma linha recta no diagrama» 2 e, desta forma, criar uma nova fronteira eficiente do capital próprio, aumentando assim as possibilidades de escolha das proporções a investir em cada classe de activos. Isto mesmo pode ser visto no diagrama 3:

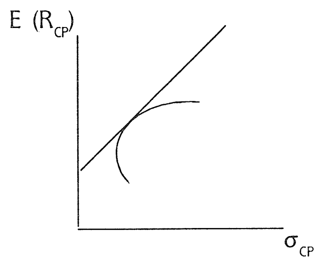

Diagrama 3

O estudo do novo paradigma deve dividir-se, portanto, em duas partes:

1) A imunização

2) A construção da fronteira eficiente do capital próprio(diagrama2).

3.1-A imunização

A imunização é uma estratégia da gestão do risco da taxa de juro. Este facto serve para delimitar o nosso campo de trabalho. O conceito de imunização aqui explicado pode aplicar-se a uma companhia de seguros que garante uma determinada remuneração a um seu cliente, durante o horizonte de investimento deste último. Esta estratégia pode também ser utilizada por um fundo de pensões em que existe uma obrigação de benefício acumulado. Num plano de obrigação de benefício acumulado não existe incerteza em relação aos fluxos de caixa futuros[10]. Assume-se que não existe risco de incumprimento nos dois casos.

A imunização é uma estratégia de investimento numa carteira de activos que tem por objectivo manter inalterado o valor do capital próprio, quando ocorre uma variação na taxa de juro.

A teoria da imunização apareceu associada à construção de carteiras de obrigações. Neste caso, o valor de mercado do capital próprio (C.P.) é dado por:

C.P. = O - R

onde :

O é o valor de mercado da carteira de obrigações;
R é o valor de mercado da responsabilidade.
A variação no capital próprio, quando ocorre uma variação na taxa interna de rendibilidade (Y), é dada por:

$$\frac{dC.P.}{dY} = O'(Y) - R'(Y)$$

Então:

$$\frac{\frac{dC.P.}{dY}}{C.P.} = \theta \frac{\frac{dO}{dY}}{O} - (\theta - 1) \frac{\frac{dR}{dY}}{R}$$

onde:

(dC.P./C.P.)/dY é a variação percentual no valor do capital próprio, que resulta de uma variação infinitesimal na taxa interna de rendibilidade e designa-se por duração modificada do capital próprio ($D_{MC.P.}$).

(dO/O)/dY é a variação percentual no valor da carteira de obrigações, que resulta de uma variação infinitesimal na taxa interna de rendibilidade e designa-se por duração modificada da carteira de obrigações(D_{MO}).

(dR/R)/dY é a variação percentual no valor da responsabilidade, que resulta de uma variação infinitesimal na taxa interna de rendibilidade e designa-se por duração modificada da responsabilidade(D_{MR}).

Dada uma variação na taxa interna de rendibilidade, a variação percentual no valor do capital próprio é nula se $\theta D_{MO} = (\theta - 1) D_{MR}$. No caso do valor de mercado da carteira de obrigações ser igual ao valor de mercado da responsabilidade, a igualdade de durações modificadas assegura a imunização. A fórmula que se apresentou para a duração[11] modificada de uma carteira de obrigações é dada pela média ponderada das durações modificadas das obrigações que a integram, onde cada ponderador é a proporção de riqueza investida na obrigação correspondente, se e só se (Ingersoll et al., 1978):

- a curva de rendimento for horizontal;
-apenas ocorrerem variações paralelas e infinitesimais na curva de rendimento;
- a curva de rendimento, durante o período de investimento, alterar-se uma única vez, logo após a aquisição da carteira.

A duração modificada pretende ser uma medida de risco. A duração modificada que se apresentou, designada por duração de primeira geração, não permite que surjam oportunidades de arbitragem apenas no caso acima referido.

Fisher e Weil(1971), Bierwag(1977), Khang(1979), e Babbel(1983) desenvolveram importantes indicadores de segunda geração. As durações modificadas de segunda geração são mais flexíveis em relação ao tipo de variação que pode ocorrer na curva de rendimento. Esta geração iniciou-se com Fisher e Weil(1971). Estes dois autores sugeriram a utilização de uma medida de duração derivada a partir de um choque aditivo na estrutura temporal das taxas à vista. Bierwag(1977) calculou, entre outras, a duração para o caso em que ocorre um choque multiplicativo na estrutura temporal. Esta medida de duração tem subjacente que, dada uma variação na curva de rendimento, as taxas à vista de curto prazo variam menos do que as taxas à vista de longo prazo. De acordo com Khang(1979), tal indicador não está de acordo com a evidência empírica. Este autor encontrou uma duração compatível com uma variação das taxas à vista de curto prazo superior à das taxas à vista de longo prazo. Babbel (1983) derivou uma medida de duração sem explicitar o tipo de

(10) Sharpe(1987) referiu que uma responsabilidade era um activo de valor negativo. Então, por analogia a este autor, pode afirmar-se que a responsabilidade da companhia de seguros é uma obrigação de cupão zero de valor negativo e o plano de obrigação de benefício acumulado é uma obrigação de taxa fixa de valor negativo.
(11) O termo duração deve-se a Macaulay(1938). Este autor definiu a duração como um período de tempo. Neste sentido, a duração de uma obrigação é a média ponderada das datas de vencimento dos seus fluxos de caixa, onde cada ponderador é a proporção do respectivo valor actual do fluxo de caixa no valor da obrigação. Assim a duração de uma obrigação é dada pela seguinte fórmula: $D=\sum t[C.F.(1+Y)^{-t}]/O$.

alteração que se dá na estrutura temporal das taxas de juro sendo, por isso, compatível com um grande número de choques. A aplicação prática desta medida exige, todavia, que se estime a variação percentual da taxa à vista de longo prazo em relação à variação percentual da taxa à vista de curto prazo. Estes indicadores de segunda geração são compatíveis com o aparecimento de oportunidades de arbitragem, se ocorrer um choque que não esteja implícito na sua construção.

Com a terceira geração, aparecem as primeiras medidas compatíveis com várias alterações simultaneas na estrutura temporal das taxas de juro, dando origem aos modelos de múltiplas durações[12]. Estes modelos pretendem capturar, através dos seus vários factores, os diferentes tipos de variações que se dão numa curva de rendimento. Todavia, estes indicadores de terceira geração são compatíveis com o aparecimento de oportunidades de arbitragem se ocorrerem choques que não estão implícitos na construção dos modelos (Bierwag, 1977) ou não são empiricamente testáveis (Prisman e Shores, 1988).

Na quarta geração, incluem-se as medidas de duração de um factor que são obtidas a partir de modelos de valorização de obrigações em equilíbrio dinâmico (Vasicek, 1977), (Cox et al.,1979 e 1985). Nestes casos, a forma funcional do preço das obrigações depende de como se estabelecem três pressupostos:

1. A estrutura temporal (e o preço das obrigações) relaciona-se funcionalmente com determinados factores estocásticos, as variáveis de estado.
2. As variáveis de estado seguem um determinado processo estocástico.
3. Os mercados são suficientemente perfeitos para que se obtenha um equilíbrio, onde não são permitidas oportunidades de arbitragem.

A partir destes três pressupostos é possível obter uma equação da estrutura temporal das taxas de juro que impede o aparecimento de oportunidades de arbitragem. O preço de qualquer obrigação é depois obtido resolvendo a equação da estrutura temporal. As durações modificadas estimadas a partir destes modelos são incompatíveis com o aparecimento de oportunidades de arbitragem.

Os modelos de quarta geração assumem que as taxas de rendibilidade de todas as obrigações estão perfeitamente correlacionadas, pois todas elas dependem de uma única e mesma variável de estado. Brennan (et al., 1980, 1982 e 1983) e Schaefer (et al., 1984) tentaram ultrapassar esta limitação, desenvolvendo modelos de múltiplas durações. Com base em modelos de equilíbrio dinâmico deram origem à quinta geração de durações modificadas.

As primeiras tentativas para alargar o conceito da imunização à constituição de carteiras de acções e de obrigações são muito recentes (Leibowitz, 1987), (Bostock et al., 1989).

Agora, o valor de mercado do capital próprio é dado por:

$$C.P.\,(K, Y, Y^*) = A(K) + O(Y) - R(Y^*)$$

onde:

A é o valor de mercado da carteira de acções

A taxa de rendibilidade da carteira de acções depende da taxa interna de rendibilidade do mercado obrigacionista, isto é, K=f(Y)

A taxa de rendibilidade da responsabilidade depende da taxa interna de rendibilidade do mercado obrigacionista, isto é, $Y^*=f(Y)$

A variação no valor do capital próprio quando ocorre uma alteração infinitesimal na taxa interna de rendibilidade é dada por:

$$\frac{dC.P.}{dY} = O'(Y) + A'(K)\frac{dK}{dY} - R'(Y^*)\frac{dY^*}{dY}$$

Então,

$$\frac{dC.P.}{dY} = -\frac{Do}{(1+Y)}O - \frac{Da}{(1+K)}A\frac{dK}{dY} + \frac{Dr}{(1+Y^*)}R\frac{dY^*}{dY}$$

$$D_{MC.P.} = D_{MO}\frac{O}{C.P.} + D_{MA}\frac{A}{C.P.}\frac{dK}{dY} - D_{MR}\frac{R}{C.P.}\frac{dY^*}{dY}$$

A imunização define-se agora como a estratégia de construção de uma carteira de acções e de obrigações que anula a duração modificada[13] do capital próprio.

Bostock(1989) escreveu que a imunização exige a resolução da equação $D_a A + D_o O + D_r R = 0$. Como se vê, para que tal seja possível é necessário que as

[12] Ver Bierwag(1977), Cooper(1977), Ingersoll(1983), Nelson (et al.,1983), Chambers (et al.,1988) e Prisman (et al.,1988).
[13] A relação entre a duração modificada de um activo (ou responsabilidade) e a sua duração é a seguinte: $D_M = -D/(1+Z)$, onde Z é a taxa de desconto que iguala o somatório dos fluxos de caixa actualizados do activo ao seu preço.

taxas de rendibilidade de todos os activos e da responsabilidade tenham o mesmo valor inicial e estejam correlacionadas de forma positiva e perfeita. Isto vai contra a evidência empírica e, portanto, a duração de uma carteira não é igual à média ponderada das durações dos activos que a integram[14].

Leibowitz(1987) introduziu o conceito de duração efectiva(D_e), que não é mais do que uma sensibilidade das taxas de rendibilidade da carteira de acções, da carteira de obrigações ou da responsabilidade a variações numa taxa interna de rendibilidade: $R_l = a_l + D_{el}\,\Delta Y + e_l$. Neste caso, o capital próprio fica imune a variações paralelas na estrutura temporal das taxas de juro quando $\theta\,(X_a D_{ea} + X_o D_{eo}) = (\theta - 1)D_{er}$. As percentagens de riqueza investidas em acções e obrigações são X_a e X_o, com $X_a + X_o = 1$. As carteiras que satisfazem aquela equação permitem anular parcialmente o risco da taxa de juro.

Subsistem duas críticas a estas soluções:

1) A curva de rendimento pode sofrer variações não paralelas significativas;
2) O risco de uma carteira de acções não é dado apenas pelo risco da taxa de juro.

Em resumo, as soluções propostas até ao momento não têm em consideração todos os factores que podem alterar o valor do capital próprio.

3.2 A fronteira eficiente do capital próprio

Assume-se que um investidor tem como objectivo maximizar a taxa de rendibilidade esperada do seu capital próprio para um dado nível de variabilidade desse capital próprio. A função objectivo de um investidor com uma tolerância ao risco T, que se pretende maximizar, pode então ser escrita da seguinte forma:

$$U = E(R_{C.P}) - \sigma_{C.P}^2 / T$$

e é sujeita às seguintes condições:

$$\sum_{ai=1}^{N} X_{ai} + \sum_{oj=1}^{N} X_{oj} = 1$$

$$X_{ai}, X_{oj} \geq 0,\ \forall \text{ ai e oj (Acção i e Obrigação j)}$$

Isto é equivalente à formulação do seguinte problema de programação matemática:

$$\text{Max } E(R_{C.P})$$

$$\text{s.a. } \sigma_{C.P}^2 = K \quad (1)$$

$$\sum_{ai=1}^{N} X_{ai} + \sum_{oj=1}^{N} X_{oj} = 1 \qquad (2)$$

$$X_{ai}, X_{oj} \geq 0 \text{ para todo o ai e oj} \qquad (3)$$

K é um número real positivo. Este problema é resolvido através de um algoritmo de programação quadrática ou, no caso de não se entrar em consideração com a terceira restrição, por recurso ao cálculo. Neste caso, pode-se construir a seguinte função Lagrangeana:

$$L = E(R_{C.P}) + \lambda_1 [\, K - \sigma_{C.P.}^2 \,] + \lambda_2 \, [1 - \sum_{ai=1}^{N} X_{ai} - \sum_{oj=1}^{N} X_{oj}]$$

As condições de primeira ordem para a resolução deste problema são as seguintes: $\partial L/\partial \lambda 1 = 0$; $\partial L/\partial \lambda_2 = 0$; $\partial L/\partial X = 0$. Estas equações são resolvidas para λi e X, de modo a obter-se um ponto de estacionariedade para o K específico. Ao fazer variar K obtém-se uma parábola: a fronteira de variância mínima do capital próprio. A fronteira eficiente do capital próprio é a metade superior da parábola, ou seja, é constituída pelos pontos da fronteira de variância mínima que têm uma variância do capital próprio mínima para uma dada taxa de rendibilidade esperada do capital próprio e uma taxa de rendibilidade esperada máxima do capital próprio para uma dada variância do capital próprio.

A taxa de rendibilidade esperada do capital próprio e a variância das taxas de rendibilidade do capital próprio são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$E(R_{C.P}) = \theta [\sum_{ai=1}^{N} X_{ai} E(R_{ai})$$

$$+ \sum_{oj=1}^{N} X_{oj} E(R_{oj})] - (\theta - 1)\, E(R_r)$$

[14] No cálculo da duração de uma acção assume-se geralmente que a taxa de crescimento dos dividendos é constante e inferior à sua taxa de rendibilidade (Boquistet al., 1975), (Livingston, 1978), (Williams et al.,1982), (Casabona et al.,1984), (Farrel, 1985), (Bostock et al., 1989),(Leibowitz et al., 1989) e (Johnson, 1990).

$$\sigma^2_{C.P} = \theta^2\Big(\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}^2\, \sigma_{ai}^2 + \sum_{ai=1}^{N}\sum_{\substack{ak=1\\ i\neq k}}^{N} X_{ai}X_{ak}\sigma_{aiak}$$

$$+\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}^{\ 2}\, \sigma_{oj}^2 + \sum_{oj=1}^{N}\sum_{\substack{ol=1\\ j\neq l}}^{N} X_{oj}X_{ol}\sigma_{ojol}\Big)$$

$$+(\theta - 1)^2\, \sigma r^2$$

$$+\theta^2 \sum_{ai=1}^{N}\sum_{oj=1}^{N} X_{ai}X_{oj}\sigma_{aioj}$$

$$-2\,\theta\,(\theta - 1)\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}\sigma_{air}$$

$$-2\,\theta\,(\theta - 1)\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}\sigma_{ojr}$$

onde: os índices ai e ak referem-se às acções, os índices oj e ol referem-se às obrigações e o índice r refere-se à responsabilidade.

A utilização destas fórmulas para a resolução do problema implica que se estimem todas as convariâncias duas a duas.

O modelo de Yoon(1979) pode ser adaptado ao novo paradigma. Assumem-se os pressupostos do modelo de regressão linear, o do modelo de mercado e que os resíduos da responsabilidade não estão correlacionados com os resíduos dos activos. As rendibilidades dos activos (positivos ou negativos) de diferentes classes são explicadas por modelos diferentes de um único índice e as rendibilidades dos activos (positivos ou negativos) dentro da mesma classe são geradas pelo mesmo modelo de um único índice.

Assim, no modelo de Yoon adaptado, a taxa de rendibilidade esperada do capital próprio e a variância das taxas de rendibilidade do capital próprio são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$E(R_{C.P}) = \theta\ \Big\{\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}[a_i + \beta_i\ E(R_m)] + \sum_{oj=1}^{N} X_{oj}[a_j + \beta_j\ E(dY)]\Big\}$$

$$-(\theta - 1)[a_r + \beta_r E(I_r)]$$

$$\sigma_{CP}^{\ 2} = \theta^2\ \Big[\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}^{\ 2}(\beta_i^{\ 2}\sigma_m^{\ 2} + \sigma_{ei}^{\ 2}) + \sum_{ai=1}^{N}\sum_{\substack{ak=1\\ i\neq k}}^{N} X_{ai}X_{ak}(\beta_{ai}\beta_{ak}\sigma_m^{\ 2})$$

$$+\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}^{\ 2}\,(\beta_j^{\ 2}\sigma_Y^{\ 2} + \sigma_{ej}^{\ 2}) + \sum_{oj=1}^{N}\sum_{\substack{ol=1\\ j\neq l}}^{N} X_{oj}X_{ol}(\beta_j\beta_l\sigma_Y^{\ 2})\Big]$$

$$+(\theta - 1)^2(\beta_r^{\ 2}\sigma_{Ir}^{\ 2} + \sigma_{er}^{\ 2})$$

$$+\theta^2\ \Big[\sum_{ai=1}^{N}\sum_{oj=1}^{N} X_{ai}X_{oj}(\beta_i\beta_j\sigma_{m.Y})\Big]$$

$$-2\,\theta\,(\theta - 1)\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}(\beta_i\beta_r\sigma_{m.Ir})$$

$$-2\,\theta\,(\theta - 1)\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}(\beta_j\beta_r\sigma_{Y.Ir})$$

onde: m, Y e Ir representam, respectivamente, os índices das acções, das obrigações e da responsabilidade.

O modelo de Yoon adaptado, ao assumir que a correlação entre activos, passivos e activos e passivos se deve exclusivamente aos factores, pretende simplificar a representação da fronteira eficiente do capital próprio. Este modelo permite que um investidor se posicione em relação aos diversos riscos sistemáticos. Todavia, como se usam índices diferentes para explicar o comportamento de activos pertencentes a classes diferentes, o modelo não é suficiente para construir uma carteira imunizada.

É necessário permitir a aplicação de uma fórmula semelhante à atribuída a Leibowitz $[\theta\ (X_a D_{ea} + X_o\ D_{eo}) = (\theta - 1)D_{er}]$ para se imunizar (se assim se desejar) um ou vários riscos. Isto obriga a que as rendibilidades dos activos sejam uma função dos mesmos factores que influenciam a responsabilidade, podendo os activos ser também explicados por outros índices. Veja-se o caso de um agente económico cujas responsabilidades são geradas pelo seguinte modelo de dois factores:

$$R_r = a_r + \beta_{1r}\, F_1 + \beta_{2r}\, F_2 + e_{ir}$$

Os modelos que explicam a taxa de rendibilidade, respectivamente, das acções e das obrigações podem ser, por exemplo, do seguinte tipo:

$$R_{ai} = a_{ai} + \beta_{1ai}\, F_1 + \beta_{2ai}\, F_2 + \beta_{3ai}\, F_3 + e_{ai}$$

$$R_{oj} = a_{oj} + \beta_{1oj}\, F_1 + \beta_{2oj}\, F_2 + \beta_{4oj}\, F_4 + e_{oj}$$

Estes três modelos podem ser usados para construir a fronteira eficiente do capital próprio. Neste caso, a taxa de rendibilidade esperada e a variância das taxas de rendibilidade são dadas por:

$$E(R_{CP}) = \theta \{ \sum_{ai=1}^{N} X_{ai}[a_{ai}+\beta_{1ai} E(F_1)+\beta_{2ai}E(F_2)+\beta_{3ai}E(F_3)]$$

$$+\sum_{oj=1}^{N} X_{oj} [a_{oj}+\beta_{1oj}E(F_1)+\beta_{2oj} E(F_2)+\beta_{4oj} E(F_4)]\}$$

$$-(\theta - 1)[a_r+\beta_{1r} E(F_1) +\beta_{2r} E(F_2))]$$

$$\sigma_{CP}^2 = \theta^2[\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}^2(\beta_{1ai}^2\sigma_{F1}^2 + \beta_{2ai}^2\sigma_{F2}^2 + \beta_{3ai}^2\sigma_{F3}^2 + \sigma_{eai}^2)$$

$$+\sum_{ai=1}^{N} \sum_{\substack{ak=1 \\ i\neq k}}^{N} X_{ai}X_{ak}(\beta_{1ai}\beta_{1ak} \sigma_{F1}^2 + \beta_{2ai}\beta_{2ak} \sigma_{F2}^2 + \beta_{3ai}\beta_{3ak} \sigma_{F3}^2)$$

$$+\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}^2(\beta_{1oj}^2\sigma_{F1}^2 + \beta_{2oj}^2\sigma_{F2}^2 + \beta_{4oj}^2\sigma_{F4}^2 + \sigma_{eoj}^2)$$

$$+\sum_{oj=1}^{N} \sum_{\substack{oj=1 \\ j\neq l}}^{N} X_{oj}X_{ol}(\beta_{1oj}\beta_{1ol}\sigma_{F1}^2+\beta_{2oj}\beta_{2ol}\sigma_{F2}^2+\beta_{4oj}\beta_{4ol}\sigma_{F4}^2)]$$

$$+(\theta - 1)^2(\beta_{1r}^2\sigma_{F1}^2+\beta_{2r}^2\sigma_{F2}^2+\sigma_{er}^2)$$

$$+\theta^2[\sum_{ai=1}^{N} \sum_{oj=1}^{N} X_{ai}X_{oj}(\beta_{1ai}\beta_{1oj} \sigma_{F1}^2+\beta_{2ai}\beta_{2oj}\sigma_{F2}^2)]$$

$$-2\theta(\theta - 1)\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}(\beta_{1ai}\beta_{1r}\sigma_{F1}^2 + \beta_{2ai}\beta_{2r}\sigma_{F2}^2)$$

$$-2\theta(\theta - 1)\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}(\beta_{1oj}\beta_{1r}\sigma_{F1}^2 + \beta_{2oj}\beta_{2r}\sigma_{F2}^2)$$

A fronteira eficiente pode agora ser obtida, tendo em conta o posicionamento desejado em relação aos vários factores de risco, ou seja, colocando-se restrições do tipo:

$$\theta (\sum_{ai=1}^{N} X_{ai}\, \beta_{\alpha ai} +\sum_{oj=1}^{N} X_{oj}\, \beta_{\alpha oj}) - (\theta - 1)\, \beta_{\alpha r} = K$$

onde K é uma constante e a é o índice do factor de risco. Se K fôr zero, a carteira fica imunizada em relação ao factor a que diz respeito o índice.

A proposta que se acabou de apresentar assume que os factores são independentes entre si. Assume-se que também estão presentes os pressupostos do modelo de regressão múltipla e o do modelo de múltiplos índices.

A utilização de modelos de múltiplos índices pretende ultrapassar os problemas que estão associados à soma de durações. Isto não significa, contudo, que a teoria da imunização não seja útil, do ponto de vista prático, para a distribuição por activos. Com efeito, um investidor pode construir, por um lado, a fronteira eficiente (de Markowitz) do capital próprio considerando apenas as acções e a responsabilidade e, por outro, uma carteira imunizada considerando apenas as obrigações e a responsabilidade. Por fim, se o investidor aplicar uma parcela dos seus recursos na carteira imunizada e o restante na carteira da fronteira eficiente (de Markowitz) do capital próprio, ele está a usar uma estratégia de Tobin adaptada ao novo paradigma. Esta estratégia está sujeita a críticas, na medida em que não entra em consideração com as obrigações na fronteira eficiente (de Markowitz) do capital próprio.

4.Conclusões

O processo de investimento tradicional, que considera somente a rendibilidade esperada e o risco dos activos, apenas é adequado quando não existe incerteza em relação às responsabilidades.

De acordo com o paradigma descrito neste artigo, os investidores devem seleccionar uma carteira de activos da fronteira eficiente do capital próprio.

A fronteira eficiente do capital próprio é constituída por todas as carteiras de activos que proporcionam ao seu detentor o maior valor esperado da taxa de rendibilidade do capital próprio para uma dada variabilidade do capital próprio e o menor risco do capital próprio para um dado valor esperado da taxa de rendibilidade do capital próprio.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Gordon J. e **SHARPE**, William F.«Fundamentals of Investments», Prentice-Hall, 1989, U.S.A.

ARNOTT, Robert D. e **BERNSTEIN**, Peter L. «The Right Way To Manage Your Pension Fund», Harvard Business Review, Jan.-Feb.1988, Págs. 95-102.

ARTHUR, T.G. e **RANDALL**, P.A. «Actuaries, Pension Funds and Investment», Journal of The Institute of Actuaries, Vol.117, Part I, Nº466, June 1990, Págs.1-49.

BABBEL, David F. «Duration and the Term Structure of Interest Rate Volatility» em «Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization» ed. George K. Kaufman, G.O. Bierwag e Alden Toevs, JAI Press, 1983, Págs.239-265.

BIERWAG, G.O. «Immunization, Duration, and The Term Structure of Interest Rates», Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1977, Págs. 725-741.

BOQUIST, John A. **RACETTE**, George A. e **SCHLARBAUM**, Gary G. «Duration and Risk assessment for bonds and common stocks», The Journal of Finance, Vol.XXX, nº5, December 1975, Págs.1360-1365.

BOSTOCK, Paul, **WOOLLEY**, Paul e **DUFFY**, Martin.«Duration-Based Asset Allocation», Financial Analysts Journal, Jan.-Feb.1989, Págs. 53-60.

BRENNAN, Michael J. and **SCHWARTZ**, Eduardo S. «Conditional Predictions of Bond Prices and Returns», The Journal of Finance, Vol.XXXV, nº2, May 1980, Págs.405-419.

BRENNAN, Michael J. and **SCHWARTZ**, Eduardo S. «An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency», Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.XVII, Nº3, September 1982, Págs. 299-329.

BRENNAN, Michael J. e **SCHWARTZ**, Eduardo S. «Duration, Bond Pricing, And Portfolio Management» em «Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization» ed. George K. Kaufman, G.O. Bierwag e Alden Toevs, JAI Press, 1983, Págs.3-36.

CÂMARA, António de Sousa da, «A fronteira eficiente da situação líquida para um horizonte de investimento de um único período», Tese de Mestrado, ISEG/UTL, 1991, Manuscrito não publicado.

CASABONA, Patrick A., **FABOZZI**, Frank J. e **FRANCIS**, Jack C.«How to apply duration to equity analysis», The Journal of Portfolio Management, Winter 1984, Págs. 52-58.

CHAMBERS, Donald R., **CARLETON**, Willard T. e **McENALLY**, Richard W. «Immunizing Default-Free Bond Portfolios With a Duration Vector», Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.23, nº1, March 1988, Págs.89-104.

COOPER, I.A. «Asset Values, Interest-rate Changes, and Duration», Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1977, Págs. 701-723.

COX, John C., **INGERSOLL**, Jonathan E. e **ROSS**, Stephen A. «Duration and The Measurement of Basis Risk», Journal of Business, 1979, Vol.52, nº1, Págs. 51-61.

COX, John C., **INGERSOLL**, Jonathan E. e **ROSS**, Stephen A. «A Theory of The Term Structure of Interest Rates», Econometrica, Vol. 53., Nº2, March 1985, Págs.385-407.

DIERMEIER, Jeffrey J. «Asset Allocation Strategies» em «The Financial Analyst's Handbook» Second Edition, Ed. Sumner N.Levine, Dow Jones-Irwin, New York, 1988, Págs.1231-1284.

ELTON, Edwin J. e **GRUBER**, Martin J. «Modern Portfolio Theory and Investment Analysis», Third Edition, John Wiley & Sons, 1987, Singapore.

FARREL Jr., James L. «The Dividend Discount Model:A Primer», Financial Analysts Journal, Nov.-Dec. 1985, Págs.16-25.

FISHER, Lawrence e **WEIL**, Roman. «Coping With the Risk of Interest Rate Flutuations: Returns to bondholders from naive and optimal strategies», The Journal of Business, Oct.1971, Vol.44, Nº4, Págs. 408-431.

INGERSOLL Jr, Jonathan E. «Is Immunization Feasible? Evidence From CRSP Data» em «Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization» ed. George K. Kaufman, G.O. Bierwag e Alden Toevs, JAI Press, 1983, Págs.163-182.

INGERSOLL Jr., Jonathan E., **SKELTON**, Jeffrey e **WEIL**, Roman L. «Duration Forty Years Later», Journal of Financial and Quantitative Analysis, November 1978, Págs. 627-649.

JOHNSON, Lewis D. «Convexity for Equity Securities: Does Curvature Matter?», Financial Analysts Journal, Sep.-Oct. 1990, Págs.70-72.

KHANG, Chulsoon. «Bond Immunization When Short-Term Interest Rates Fluctuate More than Long- Term Rates», Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.XIV, Nº5, December 1979, Págs.1085-1090.

LEIBOWITZ, Martin L. «A New Perspective on Asset Allocation», The Research Foundation of The Institute of Chartered Financial Analysts, 1987, E.U.A.

LEIBOWITZ, Martin L., **HENRIKSSON**, Roy D. e **KRASKER**, William S. «Portfolio Optimization Within a Surplus Framework» em «Asset Allocation: A Handbook of Portfolio Policies, Strategies & Tactics», Ed. Robert D. Arnott e Frank J. Fabozzi, Probus Publishing Company, 1988, New York, Págs.165-192.

LEIBOWITZ, Martin L., **SORENSEN**, Eric H., **ARNOTT**, Robert D. e **HANSON**, H.Nicholas. «A Total Differencial Approach to Equity Duration», Financial Analysts Journal, Sep.-Oct. 1989, Págs.30-37.

LIVINGSTON, Miles.«Duration and risk assessment for bonds and common tocks: a note»The Journal of Finance, Vol.XXXIII, nº1, March 1978, Págs. 293-295.

LOVE, Douglas A. «Form versus Substance:Who Owns Pension Assets and What Difference Does It Make?» em «Asset Allocation for Institutional Portfolios», Ed. Michael D. Joehnk, The Institute of Chartered Financial Analysts, 1987, U.S.A., Págs. 18-23.

MACAULAY, Frederic Robertson. «Some theorical problems sugested by movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856», National Bureau of Economic Research, 1938, New York.

MARKOWITZ, Harry. «Portfolio Selection», The Journal of Finance, Vol. 7, Nº1, March 1952, Págs.77-91, Reimpresso em «Classics-An Investor's Anthology», Ed. Charles D.Ellis e James R. Vertin, Dow Jones-Irwin, USA, 1989, Págs.277-293.

MARKOWITZ, Harry M.«Portfolio Selection:Efficient Diversification of Investments», Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, 1959, 4ª Impressão, 1976.

NELSON, Jeffrey e **SCHAEFER**, Stephen. «The Dynamics of Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies» em «Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization» ed. George K. Kaufman, G.O. Bierwag e Alden Toevs, JAI Press, 1983, Págs. 61-101.

PRISMAN, Eliezer Z. e **SHORES**, Marilyn R., «Duration Measures for specific term structure estimations and applications to bond Portfolio Immunization», Journal of Banking and Finance, nº12, 1988, Págs. 493-504.

SCHAEFER, Stephen M. e **SCHWARTZ**, Eduardo S. «A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution», Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.19, nº4, December 1984, Págs.413- 424.

SHARPE, William F. «Integrated Asset Allocation», Financial Analysts Journal, Sep.-Oct. 1987, Págs. 25-32.

TOBIN, J. «Liquidity Preference as Behavior Towards Risk», The Review of Economic Studies, Vol. XXV, nºs 66 a 68, 1957-1958, Págs. 65-86.

VASICEK, Oldrich. «An Equilibrium Characterization of the Term Structure», Journal of Financial Economics. Vol.5, Nº2, November 1977, Págs. 177-188.

WILLIAMS, Alex O. e **PFEIFER**, Phillip E.«Estimating Security Price Risk using Duration and Price Elasticity», The Journal of Finance, Vol.XXXVII, nº 2,May 1982, Págs.399-411.

YOON, Young Won.«A Selection Model for Bond-Stock Portfolios»,PhD Dissertation, University Microfilms International, 1979, Michigan.