



ANÁLISE DA VOLATILIDADE DO PRÉMIO DE RISCO DO MERCADO DE CAPITAIS PORTUGUÊS

Graça Martins

Doutoranda PDG-ISEG/UTL

Gualter Couto

Doutorando PDG-ISEG/UTL. Departamento de Economia e Gestão – Universidade dos Açores

Piriquito Costa

Doutorando PDG-ISEG/UTL

Resumo

Neste estudo aplicaram-se os modelos ARCH à volatilidade do prémio de risco do mercado de acções português no período 1993 a 2001, em bases diária e mensal. Constatou-se o melhor desempenho do modelo GARCH comparativamente aos ARCH e EGARCH. As rendibilidades diárias permitiram uma melhor performance do que as mensais. No subperíodo de 1997 a 2001, constatou-se existência de estacionaridade da variância, o que não aconteceu com a série global. Com base no modelo GARCH(1,1) aplicado a esse subperíodo fez-se uma previsão da volatilidade para os dias seguintes ao termo das observações.

Palavras Chave: volatilidade, prémio de risco, ARCH, GARCH, EGARCH e previsão.

1. INTRODUÇÃO

A modelização e previsão da volatilidade tem sido um dos objectos recentes da investigação teórica e empírica na área das finanças. São inúmeras as motivações da pesquisa nesta área.

Primeiro, a volatilidade medida pelo desvio padrão ou variância dos resultados é muitas vezes utilizada como medida do risco total do activo financeiro. Em segundo lugar, a volatilidade dos preços dos títulos é incluída nos modelos

mais utilizados (Black and Scholes e binomial) para determinar os preços das opções.

No passado, a volatilidade histórica tem sido a medida utilizada para estimar a volatilidade futura. No entanto, existe hoje uma crescente evidência que sugere que a utilização de volatilidades previsionais obtidas através de modelos de séries temporais mais sofisticados conduzirão a melhores e mais precisas avaliações de opções.

Finalmente, a utilização de combinação de opções possibilita a própria transacção da volatilidade como qualquer outra *commodity*, pelo que uma mais aproximada previsão da volatilidade futura possibilitará a obtenção de melhores resultados.

Dentro dos modelos de previsão de volatilidade destaca-se o *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) para representar uma série com volatilidade instável, bem como as diversas ramificações desse modelo posteriormente desenvolvidas, designadamente a partir do *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH).

Neste trabalho é feita a aplicação empírica dos modelos ARCH e GARCH ao estudo da volatilidade do prémio de risco do mercado de capitais português no período de 31/12/1992 a 31/12/2001. O principal objectivo é averiguar se a volatilidade do prémio de risco é ou não constante e se estes modelos são aplicáveis ao mercado português para a previsão da volatilidade do mercado de capitais.

O prémio de risco de mercado foi calculado com base no índice PSI_{20} deduzido da taxa de juro sem risco (*yield das OT's*).

O *software* utilizado foi o *Eviews*.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no segundo capítulo é apresentada a revisão de bibliografia, debruçando-se o terceiro sobre a metodologia, o seguinte sobre os dados e estatísticas descritivas, o quinto sobre os resultados empíricos e o sexto sobre as conclusões.

2. REVISÃO DE BIBLIOGRAFIA

As séries financeiras temporais apresentam algumas características em comum. Mandelbrot (1963), constatou que grandes variações tendem a ser seguidas por grandes variações – positivas ou negativas - e variações pequenas tendem a ser seguidas por variações pequenas ("*Volatility clustering*"). As séries financeiras temporais também costumam exibir *leptokurtosis*, ou seja, apresentam uma concentração, *kurtosis*, mais elevada em torno da média do que a distribuição normal (Mandelbrot (1963) e Fama (1965)). Finalmente, o denominado efeito de *leverage*, estudado por Black (1976), constatou que o preço das acções tende a ser negativamente correlacionado com variações na volatilidade, ou seja, a

volatilidade é maior depois de choques negativos do que depois de choques positivos da mesma magnitude.

O grande interesse entre investigadores e investidores na modelização da variância condicional das séries temporais financeiras desencadeou o desenvolvimento de um grande número de modelos que têm por base o modelo de ARCH de Engle (1982).

No trabalho inicial de Engle (1982), é proposto o modelo *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH), o qual explicita a variação temporal da variância condicional relacionando-a com variáveis conhecidas de períodos anteriores. Na forma estandardizada o modelo ARCH explicita a variância condicional como uma função linear do quadrado das inovações; em mercados em que o preço é um Martingalo, a sua variação é a própria inovação e corresponde precisamente à supra referida constatação de Mandelbrot (1963) relativa à “*volatility clustering*”. O modelo ARCH é utilizado para fornecer uma classe muito vasta de possíveis parametrizações de heteroscedasticidade.

Em muitas aplicações o modelo linear ARCH(q) requer um q com defasamentos muito longos. Em alternativa e com maior flexibilidade na estrutura do defasamento surge o modelo ARCH generalizado (GARCH) - “*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*” - desenvolvido por Bollerslev (1986).

Apesar de o modelo GARCH remover, dos resultados, os efeitos do excesso de concentração em torno da média (*Kurtosis*), não resolve o problema da assimetria da sua distribuição, especialmente nos índices do mercado de capitais que apresentam assimetrias de grande dimensão. Assim, é admissível que as previsões e a variância do seu erro, no modelo GARCH, sejam enviesadas nas séries temporais assimétricas.

Posteriormente, foram criadas algumas modificações em modelos GARCH que explicitamente têm em consideração as distribuições assimétricas. Uma alternativa de modelo não linear para ultrapassar o problema da assimetria é o modelo GARCH exponencial (EGARCH) desenvolvido por Nelson (1991). Para índices de acções provou-se que o EGARCH é o melhor modelo de heteroscedasticidade condicional. Em alternativa, Engle e Ng (1993) e Sentana (1995) propuseram o modelo GARCH quadrático (QGARCH).

Engle, Lilien e Robins (1987) introduziram o ARCH-M, uma extensão do ARCH destinada a possibilitar a utilização da variância condicional como determinante da média. No mesmo estudo o ARCH-M foi aplicado a 3 produtos de dívida pública americana, dois de curto prazo - bilhetes do Tesouro a 6 meses e a 2 meses - e um de longo prazo - obrigações de empresas a 20 anos com *rating* Aaa -, tendo concluído pela robustez do modelo e pela instabilidade do prémio de risco dos activos analisados.

Nos últimos anos foram realizados vários estudos empíricos de aplicação destes modelos a séries financeiras. Bollerslev, Chou e Kroner (1992), apresentam

um estudo amplo da aplicação empírica dos modelos GARCH às séries financeiras temporais.

Akgiray (1989) encontrou, no seu estudo, evidência empírica de superioridade dos modelos GARCH em relação aos modelos ARCH, no de médias móveis ponderadas em modelo exponencial, e nos modelos de médias históricas, para a previsão da volatilidade mensal do índice accionista do mercado norte-americano.

Franses e van Dijk (1996), comparam os modelos GARCH, QGARCH e o GJR, na previsão da volatilidade semanal de vários índices europeus de mercados de títulos. Os autores concluíram que os modelos GARCH obtiveram uma performance superior aos modelos GARCH não lineares.

O modelo GARCH-M é aplicado por Beller e Nofsinger (1998), para testar a sazonalidade da volatilidade do rendimento das acções, o que os levou a concluir que muita da rendibilidade anormal das acções no mês de Janeiro não pode ser atribuída a um maior risco sistemático. Também aplicaram o modelo a duas amostras de empresas com diferentes dimensões, tendo concluído que as grandes empresas têm uma volatilidade mais assimétrica em resposta às novidades.

Brooks (1998) aplicou um conjunto de modelos estatísticos, entre os quais os ARCH, EGARCH e GJR, para fazer previsões da volatilidade diária do rendimento das acções transaccionadas na Bolsa de Nova Iorque, entre 1968 e 1988, tendo concluído pela tendência de quase todos os modelos para preverem volatilidades superiores às verificadas. Em termos de erro absoluto médio e erro quadrático médio, os modelos AR(1), GARCH(1,1) e GJR-GARCH(1,1) estão entre os que apresentaram melhor desempenho.

Gokcan (2000), constatou que nos mercados de capitais emergentes, o modelo GARCH(1,1) tem uma performance superior ao modelo EGARCH, mesmo quando as séries de rendibilidades do mercado apresentam uma distribuição assimétrica.

French, Schwert e Stambaugh (1987) examinam a relação entre a rendibilidade das acções e a volatilidade do mercado accionista. Encontraram evidência de que o prémio de risco do mercado é positivamente correlacionado com a volatilidade prevista da rendibilidade dos títulos.

Chong, Ahmad e Abdullah (1999) analisaram a performance dos modelos GARCH e outras derivações destes modelos utilizando a taxa de rendibilidade de vários índices diários sectoriais do mercado accionista de Kuala Lumpur, constatando que o EGARCH apresenta o melhor desempenho.

Jensen e Lunde (2001) fazem um estudo comparativo entre os modelos ARCH e os NIG "*Normal Inverse Gaussian distribution*". Estes últimos modelos foram aplicados nas finanças por Barndorff-Nielsen (1997). Jensen e Lunde concluem que este modelo apresenta melhor desempenho do que alguns dos seus pares GARCH.

Fonseca (2001) estuda a não-estacionaridade das taxas dos Bilhetes do Tesouro durante a década de 1990, concluindo que o modelo ARCH-M revela um

bom poder explicativo no processo seguido pelo prémio de risco dos Bilhetes do Tesouro.

Ferreira (2001) defende que o processo GARCH apresenta características importantes que o tornam adequado para a modelização de séries temporais financeiras cuja aplicação empírica tem sido extensa e bem sucedida.

Ferreira (2002), citando Figlewski (1997), refere que os modelos GARCH ajustados a dados diários podem ser bastante úteis na previsão da volatilidade do mercado accionista para um horizonte quer curto quer longo, mas são menos úteis na previsão *ex-post* noutros mercados em horizontes que não de curto prazo.

Breid, Crato e Lima (1995) demonstram que a volatilidade condicional do preço dos activos que apresente memória longa não é apropriadamente modelada pelos modelos ARCH, GARCH, EGARCH ou modelos estocásticos padrão (memória curta) de volatilidade e propõem o chamado modelo estocástico de volatilidade de memória longa (LMSV).

Crato e Lima (1993) num estudo sobre a estrutura estocástica do preço das acções dos Estados Unidos da América, ao não encontrarem evidência que suporte a existência de memória longa no rendimento das acções, resultado contraditório com vários investigadores anteriores, encontram evidência de memória longa nos quadrados dos rendimentos.

3. METODOLOGIA

3.1 Modelo ARCH

ARCH(*q*)

O modelo autoregressivo de heteroscedasticidade condicional (ARCH) foi desenvolvido por Engle (1982). O modelo ARCH(1) não é inteiramente satisfatório porque a variância condicional depende unicamente do período imediatamente anterior. Será, portanto, de esperar que a variância seja um processo com uma memória superior a um período. Isto indica a necessidade de estender o processo de memória por um mais alargado número de observações passadas. Assim, mais defasamentos poderão ser introduzidos, obtendo-se o seguinte modelo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q y_{t-q}^2$$

A função da variância pode ser expressa em termos genéricos como:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(y_{t-1}, y_{t-2} \dots y_{t-q}, \alpha)$$

O processo ARCH(q) não deixa de ser uma generalização do processo ARCH(1).

3.2 Modelo GARCH

A evidência empírica mostrou que se deveria seleccionar um ARCH de ordem elevada para que contivesse a dinâmica da variância condicional. O ARCH Generalizado (GARCH) de Bollerslev (1986) vem responder a esta questão. Este modelo baseia-se numa especificação infinita do ARCH, permitindo reduzir o número de parâmetros estimados para apenas dois. O modelo GARCH(q, p) pode ser definido como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

com:

$$\begin{aligned} p &\geq 0, q > 0, \\ \alpha_0 &> 0, \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ \beta_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Utilizando o operador L , o modelo GARCH(q, p) pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(L)y_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2$$

com,

$$\begin{aligned} \alpha(L) &= \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q \\ \beta(L) &= \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p \end{aligned}$$

Para $p=0$, o processo reduz-se a um ARCH(q) e para $p=q=0$, y é um ruído branco. Num processo ARCH(q) a variância condicional é especificada como uma função linear das variâncias históricas da amostra, enquanto que o processo GARCH(q, p) também entra em conta com a variância condicional desfasada. Este facto corresponde a uma espécie de mecanismo adaptativo de aprendizagem.

De acordo com Bollerslev (1986) – teorema 1 – para que exista um processo estacionário de volatilidade, a soma dos coeficientes deverá ser inferior a 1, tal que:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

3.3 Modelo EGARCH

O modelo GARCH apresenta alguns problemas. Primeiro, a variância condicional não é capaz de responder a aumentos e quedas assimétricas do y_t , que são importantes características do comportamento da rendibilidade do mercado de capitais. Segundo, as restrições dos parâmetros são muitas vezes violadas na sua estimação. Por fim, é difícil avaliar o impacto dos choques na variância condicional quando persistentes.

O modelo exponencial de GARCH (EGARCH) foi proposto por Nelson (1991) sendo apresentado pela seguinte formulação:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2)$$

em que z_t corresponde à série normalizada dos resíduos:

$$z_t = \frac{y_t}{\sigma_t}$$

O valor de $g(z_t)$ depende de vários elementos. Nelson (1991), refere que “para acomodar a relação assimétrica entre a rendibilidade das acções e a variação da volatilidade (...) o valor de $g(z_t)$ tem de ser função da magnitude e do sinal de z_t ”, pelo que foi sugerido pelo autor a seguinte expressão para a função $g(\cdot)$:

$$g(z_t) \equiv \underbrace{\theta_1 z_t}_{\text{sinal}} + \theta_2 \underbrace{[|z_t| - E|z_t|]}_{\text{magnitude}}$$

Note-se que, $E|z_t|$ depende dos pressupostos assumidos para a densidade não condicional.

3.4 Teste LM (Lagrange Multiplier)

No modelo ARCH(q) de Engle (1982) a variância condicional é dada pelo processo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j y_{t-j}^2$$

Para testar a presença do ARCH, ou seja, testar $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_j = 0$, contra H_1 : Existe pelo menos um $\alpha_j \neq 0$, com $j=1 \dots q$, Engle propôs o teste LM.

Engle (1982) mostra que a estatística LM pode ser calculada a partir de TR^2 , em que T representa o número de observações e R^2 o coeficiente de correlação múltipla da regressão $e_t^2 = c + e_{t-1}^2 + \dots + e_{t-q}^2$.

Na hipótese nula, a estatística tende assintoticamente para uma χ^2 , com q graus de liberdade.

No modelo GARCH(q, p) de Bollerslev (1986), a variância condicional é dada pelo seguinte processo:

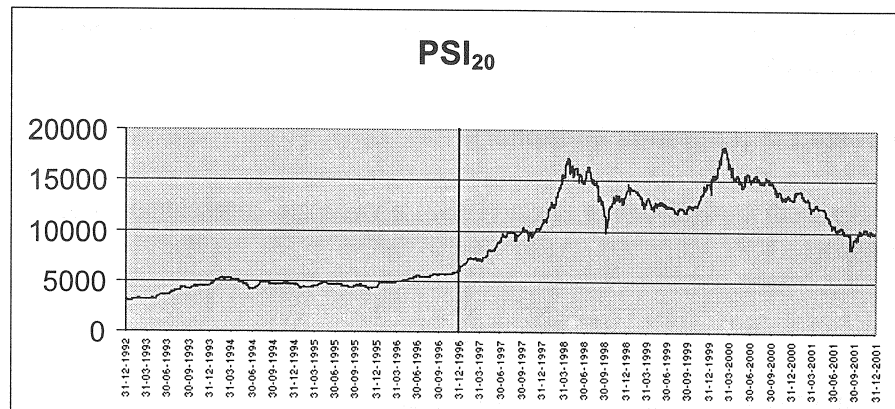
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Não se pode testar a presença de GARCH pela estatística LM apresentada por Engle. Bollerslev (1986) notou que na hipótese nula de inexistência de heterocedasticidade não há um teste geral para um GARCH(q, p) porque a matriz é singular no caso de $q > 0$ e $p > 0$.

Franses e van Dijk (2000) refere que Lee (1991), derivou a estatística LM modificada para $H_0 = a_j = \beta_i = 0$ ($j=1 \dots q, i=1 \dots p$), contra H_1 : Existe pelo menos um $a_j \neq 0$ e um $\beta_i \neq 0$. Lee mostrou que este é um teste equivalente a testar a não existência de um ARCH(q). Desta forma, na hipótese nula da homocedasticidade, o efeito GARCH e o efeito ARCH são alternativas equivalentes.

4. DADOS E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

Para a realização dos testes aos modelos ARCH e GARCH, utilizaram-se os dados referentes ao prémio de risco do mercado de capitais português, entre 31 de Dezembro de 1992 e 31 de Dezembro de 2001, totalizando 2.227 observações diárias (cerca de 250 observações por ano).



Pela observação da evolução da série, constata-se a existência de dois sub-períodos, um até 1996 e o outro após 1996. Admite-se que esta alteração estrutural, coincidente com um período de maior liquidez do mercado se deva:

- a) a uma melhoria da conjuntura económica, do que são importantes indicadores as taxas de crescimento do PIB claramente superiores às do período anterior e apresentando certa estabilidade em torno dos 3% contrariamente à irregularidade do que vinha acontecendo, em que oscilaram entre -1,4% e 3%;
- b) à redução acentuada das taxas de juro, com a Lisbor a descer de cerca de 9%, no início de 1996, para cerca de 6% no início de 1997, continuando a descer nos anos seguintes, ou seja: no período 1992/96 esta taxa situou-se entre 15% e 6% e no 1997/2001 entre 6% e 3%;
- c) ao aumento da capitalização bolsista por efeito de novas admissões de acções à cotação, designadamente na sequência de privatizações, passando de cerca de 19 mil milhões de euros no final do ano de 1996 para 37 mil milhões de euros no final de 1997 e continuando a aumentar nos anos seguintes, chegando a atingir cerca de 100 mil milhões de euros em 2000 e 2001; e
- d) aos ganhos de credibilidade associados ao cumprimento dos critérios de Maastricht e conseqüente admissão de Portugal na U.E.M..

Os modelos foram testados com base no prémio de risco diário e o prémio de risco mensal foi calculado com base no somatório das rendibilidades diárias respectivas.

A rendibilidade diária do mercado de capitais foi calculada com base no PSI_{20} ¹ de acordo com a seguinte formula:

$$R_{mt} = \ln \left(\frac{PSI_{20,t}}{PSI_{20,t-1}} \right)$$

em que:

R_{mt} = rendibilidade diária do mercado de capitais com base no índice PSI_{20} .

A escolha deste índice, em detrimento do PSI Geral, justifica-se pelo facto do PSI_{20} ser *Total Return*, ou seja, é uma série corrigida dos dividendos pagos pelas empresas que compõem o índice, para além das correcções/ajustamentos dos restantes efeitos, do tipo: aumentos de capital, incorporação de reservas, direitos de subscrição e agregação.

¹ As séries do mercado de capitais foram gentilmente cedidas pela Euronext Lisboa.

Por sua vez, considerando os inúmeros estudos empíricos realizados aos mercados de capitais internacionais que apontam para a existência de anomalias conhecidas como o “efeito de Segunda-feira” e o “efeito dia após feriado (DAF)”, testou-se a sua existência no mercado de capitais português. Os testes consistiram respectivamente nas seguintes regressões:

$$Rm_t = a + b\text{Segunda-feira}_t + e_t \quad (1)$$

$$Rm_t = a + b\text{DAF}_t + e_t \quad (2)$$

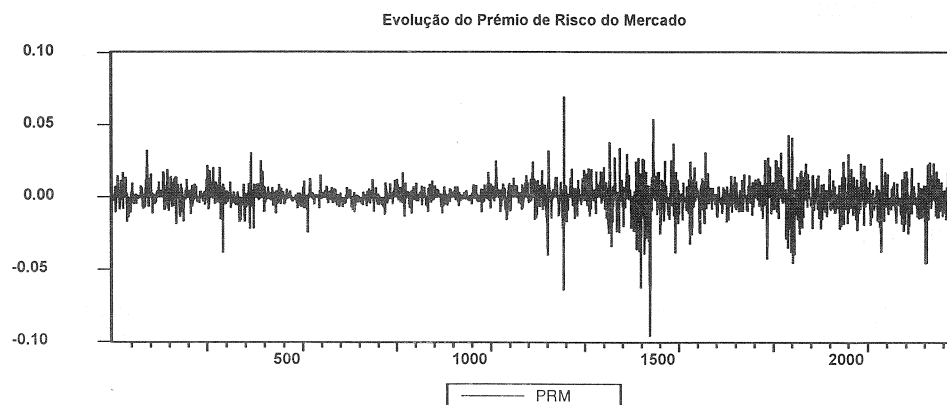
em que Segunda-feira corresponde à variável *dummy* que testa o efeito Segunda-feira. Por sua vez, o coeficiente *b* explica a diferença entre a rendibilidade média da Segunda-feira e a rendibilidade média da não Segunda-feira. Aplicou-se raciocínio idêntico à variável *dummy* que testou o efeito do dia após feriado (DAF).

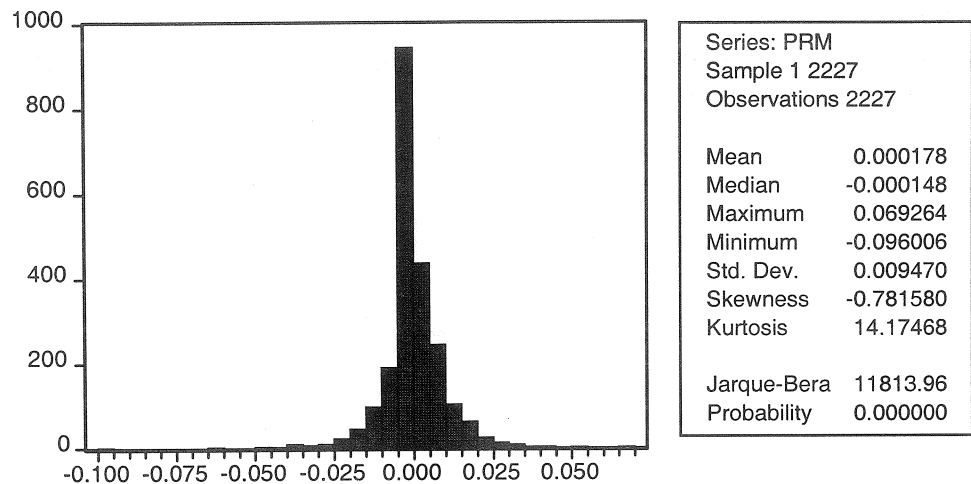
Observou-se que ambos os coeficientes *b* são estatisticamente significativos, pelo que se procedeu à limpeza da série, através da remoção sequencial destes dois efeitos.

Finalmente, para a determinação da série referente ao prémio de risco, deduzimos a rendibilidade diária do mercado bolsista a taxa de juro sem risco (R_{ft}) obtida pela correspondente série temporal relativa ao índice das obrigações do tesouro (*yield* diária das OT's).

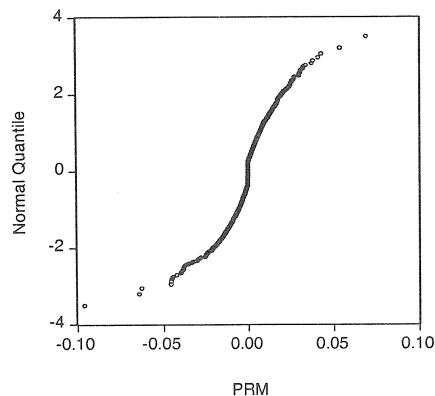
O prémio de risco do mercado foi obtido pela seguinte formula:

$$PRM_t = R_{mt} - R_{ft}$$





Pela análise da figura anterior e das respectivas estatísticas, podemos aferir que a série temporal apresenta assimetria com desvio à esquerda, com um *Skewness* (coeficiente de assimetria) de $-0,78$ (para uma curva normal simétrica o coeficiente é nulo).

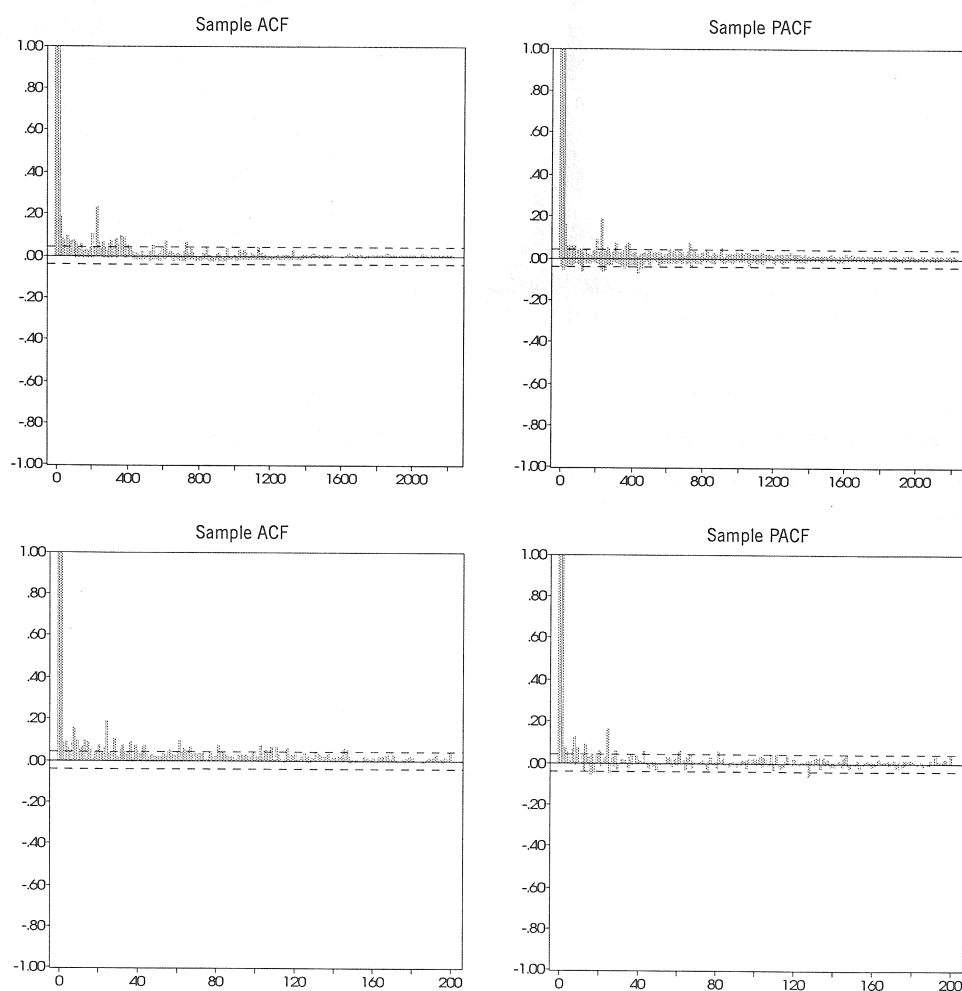


O elevado índice de *Kurtosis* (coeficiente de achatamento) da série significa a necessidade de uma *fat-tail distribution* para descrever esta variável, ou seja, indica-nos que estamos perante uma série temporal que não segue uma normal (para a distribuição normal a *kurtosis* seria igual a 3). Pelo teste Jarque-Bera rejeita-se a normalidade da série.

5. RESULTADOS EMPÍRICOS

Determinou-se a função de autocorrelação (*ACF*) e a função de autocorrelação parcial (*PACF*) do quadrado das observações referentes ao prémio de risco de

mercado, as quais revelam a existência de uma memória longa na série temporal analisada, como se pode observar nas figuras seguintes, para toda a série e para as primeiras 200 observações.



5.1 GARCH(1, 1) - Prémio de Risco do Mercado (Diário) – Amostra total

Tendo-se constatado que os resultados do modelo ARCH(1) não possibilitam a eliminação completa da correlação no quadrado dos resíduos, apresentam-se duas opções: o modelo ARCH com um número elevado de defasamentos ou um modelo GARCH(1, 1). Relativamente ao modelo ARCH, constatou-se que, só a partir de um $q=6$, se consegue eliminar a correlação existente nos resíduos, pelo que se optou por testar o modelo GARCH(1, 1), com a seguinte formulação:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Com este modelo obtiveram-se os seguintes resultados:

Dependent Variable: PRM
 Method: ML - ARCH
 Sample(adjusted): 1 2227
 Included observations: 2227 after adjusting endpoints
 Convergence achieved after 20 iterations
 Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	9.90E-07	2.63E-07	3.770085	0.0002
ARCH(1)	0.155029	0.025574	6.062064	0.0000
GARCH(1)	0.853422	0.018508	46.11158	0.0000
R-squared	-0.000353	Mean dependent var		0.000178
Adjusted R-squared	-0.001253	S.D. dependent var		0.009470
S.E. of regression	0.009476	Akaike info criterion		-6.869354
Sum squared resid	0.199719	Schwarz criterion		-6.861664
Log likelihood	7652.026	Durbin-Watson stat		1.755249

Os coeficientes da equação da variância (α_0 , α_1 e β_1) são estatisticamente significativos, a um nível de significância de 5%, o que indica a presença do efeito ARCH e GARCH na variância. No entanto, o somatório dos coeficientes é superior a 1, do que se infere pela inexistência de um processo estacionário da volatilidade.

Repetindo os dois testes para a verificação da persistência da variância, obtivemos os seguintes resultados:

Teste Q

Correlogram of Standardized Residuals Squared
 Sample: 1 2227
 Included observations: 2227

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.048	0.048	5.0939	0.024
		2	-0.033	-0.035	7.5050	0.023
		3	0.034	0.038	10.132	0.017
		4	-0.015	-0.020	10.650	0.031
		5	0.022	0.027	11.752	0.038
		6	-0.008	-0.014	11.907	0.064
		7	-0.040	-0.036	15.441	0.031
		8	-0.017	-0.016	16.071	0.041
		9	-0.003	-0.003	16.094	0.065
		10	-0.013	-0.012	16.445	0.088
		11	-0.036	-0.035	19.358	0.055
		12	-0.010	-0.006	19.588	0.075
		13	-0.035	-0.036	22.279	0.051
		14	0.015	0.019	22.785	0.064
		15	-0.010	-0.016	22.991	0.084
		16	-0.043	-0.038	27.183	0.039
		17	-0.020	-0.021	28.118	0.044
		18	-0.030	-0.032	30.157	0.036
		19	0.009	0.010	30.340	0.048
		20	0.007	0.001	30.438	0.063

Neste modelo, tal como no ARCH(1), não se aceita H_0 , ou seja, a um nível de significância de 5% (apenas 9 em 20 dos desfasamentos apresentam significância a este nível) a correlação do quadrado dos resíduos não é um ruído branco.

Teste LM

ARCH Test:

F-statistic	1.516545	Probability	0.065962
Obs*R-squared	30.20320	Probability	0.066627

Test Equation:

Dependent Variable: STD_RESID^2

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 21 2227

Included observations: 2207 after adjusting endpoints

White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.180516	0.092966	12.69841	0.0000
STD_RESID^2(-1)	0.046664	0.022681	2.057363	0.0398
STD_RESID^2(-2)	-0.038821	0.014740	-2.633648	0.0085
STD_RESID^2(-3)	0.040174	0.049221	0.816209	0.4145
STD_RESID^2(-4)	-0.021627	0.014696	-1.471608	0.1413
STD_RESID^2(-5)	0.021198	0.018970	1.117448	0.2639
STD_RESID^2(-6)	-0.015847	0.020267	-0.781936	0.4343
STD_RESID^2(-7)	-0.037264	0.012795	-2.912367	0.0036
STD_RESID^2(-8)	-0.014201	0.012132	-1.170539	0.2419
STD_RESID^2(-9)	-0.005335	0.018116	-0.294519	0.7684
STD_RESID^2(-10)	-0.009150	0.012025	-0.760882	0.4468
STD_RESID^2(-11)	-0.037036	0.013190	-2.807875	0.0050
STD_RESID^2(-12)	-0.002486	0.014344	-0.173316	0.8624
STD_RESID^2(-13)	-0.035305	0.013778	-2.562491	0.0105
STD_RESID^2(-14)	0.017655	0.016481	1.071248	0.2842
STD_RESID^2(-15)	-0.013102	0.014898	-0.879481	0.3792
STD_RESID^2(-16)	-0.038502	0.012641	-3.045688	0.0023
STD_RESID^2(-17)	-0.019677	0.013387	-1.469880	0.1417
STD_RESID^2(-18)	-0.032101	0.016290	-1.970621	0.0489
STD_RESID^2(-19)	0.009891	0.017256	0.573208	0.5666
STD_RESID^2(-20)	0.001042	0.013584	0.076729	0.9388
R-squared	0.013685	Mean dependent var	0.996501	
Adjusted R-squared	0.004661	S.D. dependent var	2.325393	
S.E. of regression	2.319967	Akaike info criterion	4.530452	
Sum squared resid	11765.59	Schwarz criterion	4.584683	
Log likelihood	-4978.354	F-statistic	1.516545	
Durbin-Watson stat	1.999895	Prob(F-statistic)	0.065962	

Analisando o respectivo *p-value* individualmente, a maior parte dos coeficientes não é estatisticamente diferente de zero. Contudo, testando os coeficientes em grupo, a *Prob(F-statistic)* é significativa, pelo que não se aceita a hipótese nula, a 5% de significância, de que o quadrado dos resíduos não é correlacionado (a 10%, H_0 não seria rejeitada). Portanto, continuamos a considerar que não existe um nível de confiança significativo de que o quadrado dos resíduos seja um ruído branco.

5.2 GARCH(1, 2) - Prémio de Risco do Mercado (Diário) – Amostra total

Tendo em consideração que o modelo GARCH(1,1) não consegue eliminar completamente a correlação do quadrado dos resíduos, testaram-se outras variantes do modelo GARCH. O que apresentou melhor desempenho foi o GARCH(1, 2), quer em relação ao GARCH(2, 1), quer em relação ao GARCH (2, 2).

A formulação do GARCH(1, 2) é a seguinte:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2$$

Abaixo apresentam-se os resultados obtidos com o modelo GARCH(1, 2):

Dependent Variable: PRM
 Method: ML - ARCH
 Sample(adjusted): 1 2227
 Included observations: 2227 after adjusting endpoints
 Convergence achieved after 22 iterations
 Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	1.44E-06	3.96E-07	3.633509	0.0003
ARCH(1)	0.225353	0.036679	6.143980	0.0000
GARCH(1)	0.210635	0.120978	1.741095	0.0817
GARCH(2)	0.574331	0.109646	5.238030	0.0000
R-squared	-0.000353	Mean dependent var		0.000178
Adjusted R-squared	-0.001703	S.D. dependent var		0.009470
S.E. of regression	0.009479	Akaike info criterion		-6.876466
Sum squared resid	0.199719	Schwarz criterion		-6.866213
Log likelihood	7660.945	Durbin-Watson stat		1.755249

Para um nível de significância de 5%, o coeficiente β_1 não é significativo². Tal como no modelo GARCH(1,1), o somatório dos coeficientes é superior a 1, o que indica continuar a não existir um processo estacionário da volatilidade.

Repetindo os testes da persistência da variância, obtivemos os seguintes resultados:

² O software utilizado (Eviews 3.0) não inclui como opção a possibilidade de recalcular o modelo com a exclusão de um coeficiente intermédio não significativo.

Teste Q

Correlogram of Standardized Residuals Squared

Sample: 1 2227

Included observations: 2227

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.009	0.009	0.1743	0.676
		2	-0.007	-0.007	0.2722	0.873
		3	0.028	0.028	2.0079	0.571
		4	-0.008	-0.009	2.1585	0.707
		5	0.019	0.019	2.9341	0.710
		6	-0.003	-0.004	2.9493	0.815
		7	-0.036	-0.035	5.8491	0.557
		8	-0.014	-0.014	6.2577	0.618
		9	-0.004	-0.004	6.2942	0.710
		10	-0.004	-0.003	6.3321	0.787

Aqui, sem qualquer excepção, não se pode rejeitar a hipótese nula do quadrado dos resíduos ser um ruído branco, mesmo a um nível de significância de 10%. Desta forma, o modelo consegue, de forma positiva, remover a correlação do quadrado dos resíduos.

Teste LM

ARCH Test:

F-statistic	0.625354	Probability	0.793315
Obs*R-squared	6.266961	Probability	0.792358

Test Equation:

Dependent Variable: STD_RESID^2

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 11 2227

Included observations: 2217 after adjusting endpoints

White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.014768	0.067285	15.08170	0.0000
STD_RESID^2(-1)	0.007517	0.019991	0.376038	0.7069
STD_RESID^2(-2)	-0.005806	0.016235	-0.357626	0.7207
STD_RESID^2(-3)	0.028708	0.042093	0.682003	0.4953
STD_RESID^2(-4)	-0.007974	0.014871	-0.536211	0.5919
STD_RESID^2(-5)	0.019723	0.017324	1.138467	0.2550
STD_RESID^2(-6)	-0.002820	0.022893	-0.123195	0.9020
STD_RESID^2(-7)	-0.034854	0.013581	-2.566446	0.0103
STD_RESID^2(-8)	-0.014259	0.012035	-1.184855	0.2362
STD_RESID^2(-9)	-0.003814	0.018839	-0.202459	0.8396
STD_RESID^2(-10)	-0.002626	0.013718	-0.191445	0.8482
R-squared	0.002827	Mean dependent var	0.998511	
Adjusted R-squared	-0.001694	S.D. dependent var	2.292857	
S.E. of regression	2.294797	Akaike info criterion	4.504115	
Sum squared resid	11617.01	Schwarz criterion	4.532416	
Log likelihood	-4981.812	F-statistic	0.625354	
Durbin-Watson stat	2.000136	Prob(F-statistic)	0.793315	

A partir destes resultados, constata-se que apenas um dos coeficientes dos defasamentos é significativamente diferente de zero, dados os seus *p-values*.

Também a estatística F para os coeficientes considerados em conjunto, não permite rejeitar a hipótese nula do quadrado dos resíduos ser um ruído branco, pelo que se pode assumir que os resíduos estão suficientemente limpos pelo modelo GARCH(1, 2).

5.3 GARCH(1,1) – Prémio de Risco do Mercado (Diário) – Sub-período 1997-2001

Mikosch e Starica (2000) concluem pela impossibilidade de modelizar séries longas de rendibilidade com os modelos GARCH, na medida em que a inexistência de estacionaridade global exige a actualização dos parâmetros do modelo. Atendendo a esta constatação, confirmada também pelos resultados acima obtidos, procedemos à mesma análise, agora referente a um período mais curto (desde o início de 1997 até ao final de 2001). A escolha do sub-período baseou-se na análise gráfica do prémio de risco do mercado, que evidencia uma alteração estrutural naquela data, a qual coincide com o início de um período de maior liquidez do mercado.

Para este período mais curto testou-se também o modelo ARCH(1), concluindo-se, através do teste LM, que os quadrados dos resíduos se apresentam correlacionados.

O modelo GARCH(1,1) foi o que apresentou melhor desempenho.

Dependent Variable: PRM
 Method: ML - ARCH
 Sample: 990 2227
 Included observations: 1238
 Convergence achieved after 9 iterations
 Bollerslev-Wooldrige robust standard errors & covariance

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	1.10E-05	2.94E-06	3.748135	0.0002
ARCH(1)	0.181555	0.044485	4.081287	0.0000
GARCH(1)	0.745662	0.044817	16.63795	0.0000
R-squared	0.000000	Mean dependent var		7.30E-06
Adjusted R-squared	-0.001620	S.D. dependent var		0.011625
S.E. of regression	0.011634	Akaike info criterion		-6.258469
Sum squared resid	0.167157	Schwarz criterion		-6.246058
Log likelihood	3876.992	Durbin-Watson stat		1.802642

Todos os coeficientes são significativos mesmo ao nível de significância de 1%, existindo um processo estacionário de volatilidade na medida em que a soma dos coeficientes é inferior a 1 (0,93).

Teste Q

Sample: 990 2227
Included observations: 1238

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.037	0.037	1.6854	0.194
		2	-0.020	-0.021	2.1774	0.337
		3	0.027	0.028	3.0715	0.381
		4	-0.037	-0.039	4.7526	0.314
		5	0.025	0.029	5.5041	0.357
		6	-0.004	-0.008	5.5217	0.479
		7	-0.010	-0.006	5.6491	0.581
		8	0.002	0.000	5.6567	0.686
		9	-0.013	-0.011	5.8718	0.753
		10	-0.004	-0.004	5.8915	0.824

Os testes *Q* e *LM* concluem pela rejeição da hipótese H_0 , assumindo-se, por isso, que o quadrado dos resíduos é um ruído branco, podendo-se, assim, considerar que o modelo GARCH(1,1) consegue limpar os resíduos.

Teste LM

ARCH Test:

F-statistic	0.645328	Probability	0.775487
Obs*R-squared	6.477263	Probability	0.773700

Test Equation:

Dependent Variable: STD_RESID^2

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 1000 2227

Included observations: 1228 after adjusting endpoints

White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.995591	0.088069	11.30471	0.0000
STD_RESID^2(-1)	0.040980	0.036496	1.122853	0.2617
STD_RESID^2(-2)	-0.024404	0.020538	-1.188274	0.2350
STD_RESID^2(-3)	0.031078	0.051968	0.598015	0.5499
STD_RESID^2(-4)	-0.039772	0.021933	-1.813347	0.0700
STD_RESID^2(-5)	0.028863	0.031565	0.914413	0.3607
STD_RESID^2(-6)	-0.007960	0.028448	-0.279803	0.7797
STD_RESID^2(-7)	-0.006536	0.020313	-0.321781	0.7477
STD_RESID^2(-8)	0.000100	0.021297	0.004710	0.9962
STD_RESID^2(-9)	-0.011149	0.021393	-0.521149	0.6024
STD_RESID^2(-10)	-0.003635	0.018036	-0.201537	0.8403
R-squared	0.005275	Mean dependent var	1.003132	
Adjusted R-squared	-0.002899	S.D. dependent var	2.235986	
S.E. of regression	2.239224	Akaike info criterion	4.459053	
Sum squared resid	6102.191	Schwarz criterion	4.504855	
Log likelihood	-2726.859	F-statistic	0.645328	
Durbin-Watson stat	2.000019	Prob(F-statistic)	0.775487	

5.4 Equação da variância do modelo GARCH(1, 1)

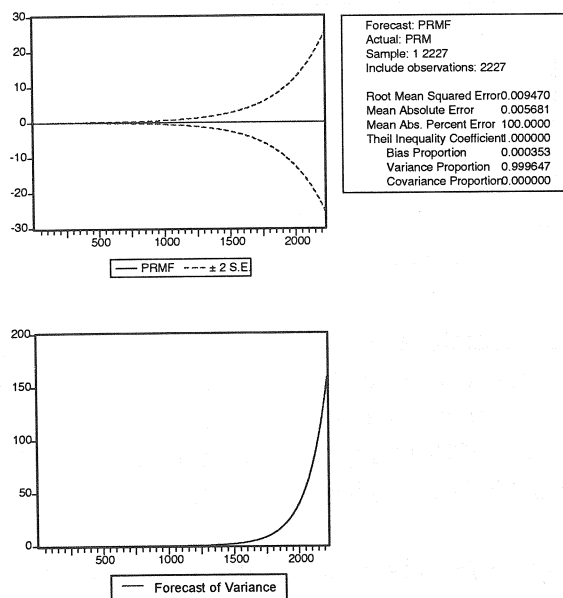
O modelo escolhido para a previsão da volatilidade do prémio de risco do mercado foi o GARCH(1,1), com base no sub-período 1997-2001. Deste resultou a seguinte equação para a variância condicional:

$$\sigma_t^2 = 1.10E - 05 + 0.181555y_{t-1}^2 + 0.745662\sigma_{t-1}^2$$

5.5 Previsão da Volatilidade do Prémio de Risco do Mercado

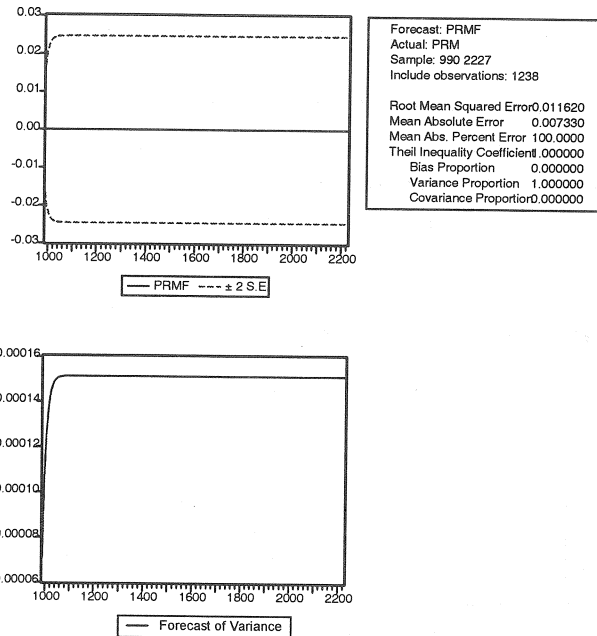
Dado que, no modelo GARCH(1,2) aplicado ao período total, a soma dos coeficientes foi superior a 1, não se obteve estacionaridade no processo da volatilidade do prémio de risco do mercado, o que pode ser constatado pela análise gráfica do “Forecast of Variance” do software Eviews, pelo método de estimação dinâmico.

GARCH(1, 2) – Prémio de Risco Diário



Com o modelo GARCH(1,1) aplicado ao sub-período considerado, consegue-se obter um processo estacionário de volatilidade, dado o somatório dos coeficientes, neste modelo, ser inferior a 1, apesar de bastante próximo.

GARCH(1, 1) – Prémio de Risco de Mercado (Diário) – Sub-período 1997-2001



Como podemos constatar analiticamente, quando a soma dos α 's e dos β 's é menor do que um, os modelos GARCH apresentam uma variância finita constante, sendo por isso um ruído branco. A exemplificação deste caso é relativamente fácil para o nosso modelo GARCH(1,1), como mostra Harvey (1993). Seguindo a derivação do modelo ARCH(1), podemos escrever:

$$E E(y_t^2) = E_{t-2} [\gamma + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2] = \gamma + (\alpha + \beta) \sigma_{t-1}^2 = \gamma + (\alpha + \beta) [\gamma + \alpha y_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2]$$

Repetindo o processo até infinito, podemos verificar que se $\alpha + \beta < 1$,

$$Var(y_t) = \frac{\gamma}{(1 - \alpha - \beta)}$$

Para o modelo GARCH(1,1), aplicando a equação da variância acima discriminada, obtivemos os seguintes valores previsionais diários para a volatilidade do prémio de risco do mercado (variância não condicional):

σ_{t+1}^2	0.00001100
σ_{t+2}^2	0.00002809
σ_{∞}^2	0.00015113

Como verificamos na tabela apresentada, o valor para o qual a volatilidade tende no infinito corresponde ao valor da previsão do gráfico apresentado acima. Este valor anualizado pelos dias de transacção, corresponde a um desvio padrão do prémio de risco do mercado de aproximadamente 19,5%.

5.6 Estabilidade Estrutural

Para testar formalmente a estabilidade estrutural do modelo, realizámos, tal como Wu e Crato (1995), um teste tipo de Wald, com a seguinte formulação:

$$\lambda = (b_1 - b_2) (n_1^{-1}V_1 + n_2^{-1}V_2)^{-1} (b_1 - b_2)$$

em que:

n_1 e n_2 são as dimensões dos sub-períodos comparados;
 b_1 e b_2 são os vectores dos coeficientes estimados para o intervalo n_1 e n_2 ;
 V_1 e V_2 são as matrizes de variâncias-covariâncias correspondentes àqueles coeficientes.

A hipótese nula da estabilidade estrutural é de que b_1 seja igual a b_2 . Este teste tende assintoticamente para uma $\chi^2(k)$, em que k é igual a $p+q+1$ parâmetros.

Testámos a estabilidade estrutural da variância do prémio de risco do mercado para o sub-período compreendido entre Janeiro de 1997 e Dezembro de 2001. Por sua vez, dividimos o sub-período em dois com 30 meses cada: o primeiro de Janeiro de 1997 a Junho de 1999 e o segundo de Julho de 1999 a Dezembro de 2001. Obtivemos um lambda de 0.05, pelo que existe estabilidade estrutural da variância, ou seja não se rejeita a hipótese H_0 , para um nível de significância de 5%, no período considerado.

6. CONCLUSÕES

As principais conclusões do nosso trabalho são as seguintes. O prémio de risco do mercado diário exhibe uma significativa persistência na volatilidade que pode ser descrita por um processo GARCH. No entanto, existe alguma evidência que aponta para a não utilização de séries longas de rendibilidade, pela sua falta de estacionaridade.

De entre os modelos analisados (ARCH, GARCH e EGARCH), o que evidenciou melhor desempenho estatístico foi o modelo GARCH(1,1) aplicado ao sub-período 1997-2001. Este modelo apresentou coeficientes significativos. Estas conclusões foram corroboradas pelo teste *LM*, o que levou à não rejeição da hipótese nula do quadrado dos resíduos ser um ruído branco.

Também com o modelo GARCH(1,1) aplicado ao referido sub-período 1997-2001, conseguiu-se obter um processo estacionário de volatilidade para a previsão do prémio de risco do mercado, dado o somatório dos coeficientes deste modelo ser inferior a 1, apesar de bastante próximo.

Finalmente, constatou-se a existência de estabilidade estrutural do prémio de risco do mercado de capitais português, quando considerados dois sub-períodos de dois anos e meio cada um.

7. Bibliografia

- Akgiray, V., (1989), "Conditional heteroskedasticity in time series of stock returns: evidence and forecasts". *Journal of Business* 62, 55-80.
- Barndorff-Nielsen, O. E., (1997), "Normal Inverse Gaussian Distribution and Stochastic Volatility Modelling", *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 24, 1-13.
- Beller, Kenneth e Nofsinger, John R. (1998), "On stock return seasonality conditional heteroskedasticity". *The Journal of Financial Research*, 229-246.
- Black, F., (1976), "Studies of Stock Market Volatility Changes, Proceedings of the American Statistical Association", Business and Economic Statistics Section, 177-181.
- Bollerslev, Tim. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31: 307-27.
- Bollerslev, Tim, Chou, R. Y. e Kroner, K. F., (1992), "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence". *J. Econometrics*, 52, 5-59.
- Breidt, F. Jay; Crato, Nuno e Lima, Pedro J. F. (1995), "The detection and estimation of the long memory in stochastic volatility". *Journal of Econometrics*, vol 83, pp. 325-348.
- Brooks, Chris (1998), "Predicting Stock Index Volatility: Can Market Volume Help?". *Journal of Forecasting*, vol. 17, 59-80.
- Chong, Choo Wei; Ahmad, Muhammad Idrees; e Abdullah, Mat Yusoff (1999), "Performance of GARCH Models in Forecasting Stock Market Volatility". *Journal of Forecasting*, 18, 333-343.
- Crato, Nuno e Lima, Pedro (1993), "An Analysis of the Memory and the Linearity of US Stock Returns and Volatilities". CEMAPRE, documento de trabalho nº2.
- Engle, Robert F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica*, 50/4: 987-1006.
- Engle, Robert F., Lilién, David M., e Robins Russell P. (1987), "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model". *Econometrica*, 55/2: 391-401.
- Engle, R. F., e Ng, K.V., (1993), "Measuring and testing the impact of news on volatility", *The Journal of Finance*, XLVIII(5), 1749-78.
- Fama, E., (1965), "The Behaviour of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, 34-105.
- Ferreira, Miguel A., (2001) "Testing Models of the Spot Interest Rate Volatility", Working Paper, University of Wisconsin-Madison.
- Ferreira, Miguel A., (2002) "Forecasting Spot Interest Rate Volatility", Working Paper, University of Wisconsin-Madison.
- Fonseca, José Alberto Soares, (2001), "Risk Premium in the Portuguese Treasury Bills Interest Rates From 1990 to 1998: An ARCH-M Approach", *Estudos do GMEF*, 1, 1-17.
- Franses, P.H., e D. van Dijk, R., (1996), "Forecasting stock market volatility using (non-linear) GARCH models", *Journal of Forecasting*, 15, 229-235.
- Franses, Philip Hans e Dick van Dijk (2000), *Non-linear time series models in empirical finance*. Cambridge University Press.
- French, Kenneth R., Schwert, G. William, e Stambaugh, Robert F. (1987), "Expected Stock Returns and Volatility". *Journal of Financial Economics*, 19: 3-29.
- Gokcan, Suleyman, (2000) "Forecasting Volatility of Emerging Stock Markets: Linear versus Non-linear GARCH Models". *Journal of Forecasting*, 19, 499-504.
- Harvey, Andrew C. (1993), *Time Series Models*. The MIT Press, second edition.
- Hull, John C. (2000), *Options, Futures & Other Derivatives*. Prentice Hall, Fourth Edition.
- Jensen, M. Berg e Lunde A. (2001), "The NIG-S&ARCH model: A fat tailed, stochastic, and autoregressive conditional heteroskedastic volatility model". Working Paper Series N°83, Março. Center for Analytical Finance. University of AARHUS.
- Makridakis, Spyros; Wheelwright, Steven C.; e Hyndman, Rob J. (1998), *Forecasting. Methods and Applications*. John Wiley & Sons, Third Edition.

- Mandelbroit, B., (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", Journal of Business, 36, 394-419.
- Mikosch, T. e Starica C. (2000), "Change of structure in financial time series, long range dependence and the GARCH model". Working Paper Series N°58, Centre for Analytical Finance, University of AARHUS, April.
- Mills, Terence C. (1993), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Cambridge University Press.
- Nelson, D. B., (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New approach". *Econometrica*, 59(2), 347-370.
- Sentana, E., (1995), "Quadratic ARCH models", *Review of Economic Studies*, 62, 639-661.
- Wu, Ping e Crato, Nuno (1995), "New Tests for Stationarity and Parity Reversion: Evidence on New Zealand Real Exchange Rates". *Empirical Economics*, 20, 599-613.

Abstract

This paper studies the use of ARCH type models applied to the volatility of the Portuguese market risk premium in the period between the years 1993 and 2001, with daily and monthly data. GARCH model present best performance then ARCH and EGARCH and daily returns performed better then monthly returns. The period from 1997 to 2001 present stationary variance but global data don't. Using GARCH(1,1) model for the period from 1997 to 2001, it was made a volatility forecast.

Keywords: volatility, risk premium, ARCH, GARCH, EGARCH and forecast.
